Принцип максимума

Принцип максимума является одним из методов исследования устойчивости разностных схем для уравнений переноса, а также параболических и эллиптических уравнений.

1 Каноническая форма разностных уравнений

Пусть $\bar{\omega}$ — конечное множество узлов (сетка) в ограниченной области n-мерного евклидова пространства. Рассмотрим линейное разностное уравнение

$$\sum_{Q \in Ш(P)} A_h(P,Q)y(Q) = F(P), \quad P \in \bar{\omega} \tag{1.1}$$

относительно неизвестной сеточной функции $y(P)$. Его можно записать в канонической форме:

$$A(P)y(P) = \sum_{Q \in Ш'(P)} B(P,Q)y(Q) + F(P), \quad P \in \bar{\omega}, \tag{1.2}$$

где $Ш'(P)$ — окрестность узла P, представляющая собой множество узлов шаблона $Ш(P)$, не содержащее узла P: $Ш(P) = Ш'(P) + P$.

Далее будем рассматривать только случай, когда выполнены условия:

$$A(P) > 0; \quad B(P,Q) > 0, \ Q \in Ш'(P); \quad D(P) = A(P) - \sum_{Q \in Ш'(P)} B(P,Q) \geqslant 0, \tag{1.3}$$

Определение 1.1 *Точка P называется граничным узлом сетки $\bar{\omega}$, если в этой точке задано значение функции $y(P)$: $y(P) = \mu(P)$.*

Множество всех граничных узлов будем обозначать γ. Если $p \in \gamma$, то $A(P) = 1$, $B(P,Q) = 0$, $F(P) = \mu(P)$.

Узлы P сетки, в которых выполняется уравнение (1.2), называются внутренними узлами сетки. Множество внутренних узлов сетки будем обозначать ω. При этом $\bar{\omega} = \omega + \gamma$.

Введем обозначение:

$$Ly(P) = A(P)y(P) - \sum_{Q \in Ш'(P)} B(P,Q)y(Q).$$

Тогда каноническую форму (1.2) разностного уравнения (1.1) можно записать в виде:

$$Ly(P) = F(P). \tag{1.4}$$

Заметим, что

$$Ly(P) = D(P)y(P) + \sum_{Q \in Ш'(P)} B(P,Q)(y(P) - y(Q)). \tag{1.5}$$

Определение 1.2 *Разностная сетка $\bar{\omega}$ называется связной, если для любых двух точек $\bar{P}$, $\bar{\bar{P}} \in \bar{\omega}$ существует такая последовательность окрестностей $\{Ш'(P_i)\}$, $i = 1, 2, ..., m$, что можно совершить переход от $\bar{P}$ к $\bar{\bar{P}}$, используя лишь узлы этих окрестностей, то есть найдутся такие узлы $P_1, P_2, ..., P_m$ сетки $\bar{\omega}$, что $P_1 \in Ш'(\bar{P})$, $P_2 \in Ш'(P_1)$, ... , $P_m \in Ш'(P_{m-1})$, $\bar{\bar{P}} \in Ш'(P_m)$, причем*

$$B(\bar{P}, P_1) \neq 0; \quad B(P_i, P_{i+1}) \neq 0,\ i = 1, ..., m-1; \quad B(P_m, \bar{\bar{P}}) \neq 0. \tag{1.6}$$

Пример 1.1. *Рассмотрим схему с весами для следующей начально-краевой задачи:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad x \in (0,1),\ t > 0; \\ \\ u|_{t=0} = u_0(x); \quad u|_{x=0} = \mu_1(t); \quad u|_{x=1} = \mu_2(t). \end{cases}$$

Введем равномерную сетку:

$$\bar{\omega}_{h\tau} = \{(x_i, t_j) :\ x_i = i \cdot h,\ i = 0, 1, ..., i_0,\ h = 1/i_0;\ t_j = j \cdot \tau,\ j = 0, 1, ...\}$$

и аппроксимируем уравнение следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \Lambda\left(\sigma y_i^{j+1} + (1-\sigma) y_i^j\right) + \varphi_i^j, \quad i = 1, 2, ..., i_0 - 1; \\ y_i^0 = u_0(x_i), \quad i = 0, 1, ..., i_0; \\ y_0^j = \mu_1(t_j), \quad y_{i_0}^j = \mu_2(t_j), \quad j = 0, 1, ..., \end{cases}$$

где $\sigma \in (0,1]$, $\Lambda y_i = \dfrac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} = y_{\bar{x}x}$, $\varphi_i^j = f(x_i, t_j)$. *Пусть* $P = P(x_i, t_{j+1})$. *Тогда*

$$Ш'(P):\ Q_1(x_i, t_j),\ Q_2(x_{i-1}, t_{j+1}),\ Q_3(x_{i+1}, t_{j+1}),\ Q_4(x_{i-1}, t_j),\ Q_5(x_{i+1}, t_j).$$

Разностное уравнение можно переписать в виде:

$$\left(1 + \frac{2\sigma\tau}{h^2}\right) y_i^{j+1} = \frac{\sigma\tau}{h^2}\left(y_{i-1}^{j+1} + y_{i+1}^{j+1}\right) + \frac{(1-\sigma)\tau}{h^2}\left(y_{i-1}^j + y_{i+1}^j\right) + \left(1 - \frac{2(1-\sigma)\tau}{h^2}\right) y_i^j + \tau\varphi_i^j.$$

Следовательно,

$$A(P) = 1 + \frac{2\sigma\tau}{h^2} > 0; \quad B(P, Q_1) = 1 - \frac{2(1-\sigma)\tau}{h^2} \geqslant 0,\ \textit{если}\ \tau \leqslant \frac{h^2}{2(1-\sigma)};$$

$$B(P,Q_2)=B(P,Q_3)=\frac{\sigma\tau}{h^2}>0;\quad B(P,Q_4)=B(P,Q_5)=\frac{(1-\sigma)\tau}{h^2}\geqslant 0;$$

$$D(P)=A(P)-\sum_{Q\in Ш'(P)}B(P,Q)=0.$$

Граничные точки γ*:* $(x_i,0),\ i=0,1,...,i_0;\quad (0,t_j),\ (1,t_j),\ j=0,1,2,...$

Пример 1.2.

$$\begin{cases}\Delta u=-f(x);\ \ x=\{x_1,x_2\},\ \ 0<x_\alpha<l_\alpha,\ \ \alpha=1,2;\\ u(x)=\mu(x);\ \ x_\alpha=0\ \textit{или}\ x_\alpha=l_\alpha.\end{cases}$$

Введем двумерную равномерную сетку:

$$\bar\omega_h=\left\{x_\alpha^{(i_\alpha)}=i_\alpha h_\alpha;\ i_\alpha=0,1,...,N_\alpha;\ h_\alpha N_\alpha=l_\alpha;\ \alpha=1,2\right\}.$$

Пусть $\Lambda y=y_{\bar x_1x_1}+y_{\bar x_2x_2}$*. Получаем разностную схему:*

$$\begin{cases}\Lambda y=-f(x),\ \ x\in\omega_h;\\ y(x)=\mu(x),\ \ x\in\gamma_h,\end{cases}$$

где

$$\left(x_1^{(i_1)},x_2^{(i_2)}\right)\in\omega_h,\ \ i_\alpha=1,2,...,N_\alpha-1,\ \alpha=1,2$$

представляют собой внутренние узлы, и

$$\gamma_h=\left(0,x_2^{(i_2)}\right)\cup\left(x_1^{(i_1)},0\right)\cup\left(l_1,x_2^{(i_2)}\right)\cup\left(x_1^{(i_1)},l_2\right),\quad i_\alpha=0,1,...,N_\alpha,\ \alpha=1,2$$

граничные узлы. Запишем уравнения на внутренних узлах сетки в явном виде:

$$2\left(\frac{1}{h_1^2}+\frac{1}{h_2^2}\right)y\left(x_1^{(i_1)},x_2^{(i_2)}\right)-\frac{1}{h_1^2}\left(y\left(x_1^{(i_1-1)},x_2^{(i_2)}\right)+y\left(x_1^{(i_1+1)},x_2^{(i_2)}\right)\right)-$$

$$-\frac{1}{h_2^2}\left(y\left(x_1^{(i_1)},x_2^{(i_2-1)}\right)+y\left(x_1^{(i_1)},x_2^{(i_2+1)}\right)\right)=f\left(x_1^{(i_1)},x_2^{(i_2)}\right).$$

Пусть $P=P\left(x_1^{(i_1)},x_2^{(i_2)}\right)$*. Тогда*

$$A(P)=2\left(\frac{1}{h_1^2}+\frac{1}{h_2^2}\right)>0;\quad B(P,Q)=\frac{1}{h_\alpha^2}>0,\ \alpha=1,2;\quad D(P)=0.$$

Замечание 1.3 *Если* $f(x)\equiv 0$*, а шаги сетки* $\bar\omega_h$ *по обоим направлениям выбраны одинаковыми, т.е.* $h_1=h_2=h$*, то для решения разностного уравнения Лапласа имеет место разностный аналог формулы среднего значения для гармонических функций:*

$$y\left(x_1^{(i_1)},x_2^{(i_2)}\right)=\frac{1}{4}\left\{y\left(x_1^{(i_1-1)},x_2^{(i_2)}\right)+y\left(x_1^{(i_1+1)},x_2^{(i_2)}\right)+y\left(x_1^{(i_1)},x_2^{(i_2-1)}\right)+y\left(x_1^{(i_1)},x_2^{(i_2+1)}\right)\right\}.$$

Замечание 1.4 *В случае начально-краевых задач с условиями второго или третьего рода по всей границе соответствующая разностная задача не имеет граничных точек.*

2 Принцип максимума

Теорема 2.1 *Пусть сеточная функция $y(p) \not\equiv const$, определенная на связной сетке $\bar{\omega}$, является решением уравнения*

$$Ly(P) = F(P), \ \ P \in \omega,$$

причем для оператора L:

$$Ly(P) = A(P)y(P) - \sum_{Q \,\in\, \text{Ш}'(P)} B(P,Q)y(Q)$$

выполнены условия:

$$A(P) > 0; \ \ B(P,Q) > 0; \ \ D(P) = A(P) - \sum_{Q \,\in\, \text{Ш}'(P)} B(P,Q) \geqslant 0; \ \ P \in \omega, \ Q \in \text{Ш}'(P). \tag{2.1}$$

Тогда, если $Ly(P) \leqslant 0$ (соответственно, $Ly(P) \geqslant 0$) на ω, то $y(P)$ не может принимать наибольшего положительного (соответственно, наименьшего отрицательного) значения во внутренних узлах $P \in \omega$.

Доказательство. Пусть $Ly(P) \leqslant 0, \ P \in \omega$. Предположим, что $\exists \bar{P} \in \omega$:

$$y(\bar{P}) = \max_{\bar{\omega}} y(P) = M_0 > 0.$$

Так как $y(\bar{P}) \geqslant y(Q), \ \ Q \in Ш'(\bar{P})$, то

$$Ly(\bar{P}) = \underbrace{D(\bar{P})}_{\geqslant 0}\underbrace{y(\bar{P})}_{>0} + \sum_{Q \,\in\, Ш'(\bar{P})} \underbrace{B(\bar{P},Q)}_{>0}\underbrace{(y(\bar{P}) - y(Q))}_{\geqslant 0} \geqslant 0.$$

Поскольку по предположению $Ly(P) \leqslant 0$ во всех внутренних узлах, то $Ly(\bar{P}) = 0$, откуда следует, что $D(\bar{P}) = 0$ и $y(\bar{P}) = y(Q)$ для всех $Q \in Ш'(\bar{P})$.

Выберем какой-нибудь узел $P_1 \in Ш'(\bar{P})$. Так как $y(P_1) = y(\bar{P}) = M_0$, то, повторяя предыдущие рассуждения, получаем, что $y(P_1) = y(Q) = M_0$ для всех $Q \in Ш'(P_1)$. Возьмем узел $P_2 \in Ш'(P_1)$ и получим, что $y(P_2) = y(Q) = M_0$ для всех $Q \in Ш'(P_2)$ и т.д.

Выберем произвольную точку $\bar{\bar{P}} \in \bar{\omega}$. Так как по условию сетка $\bar{\omega}$ является связной, то за конечное число шагов можно осуществить переход от точки $\bar{P}$ к точке $\bar{\bar{P}}$: $P_1 \in Ш'(\bar{P})$, $P_2 \in Ш'(P_1)$, ... , $P_m \in Ш'(P_{m-1})$, $\bar{\bar{P}} \in Ш'(P_m)$. Следовательно, $y(\bar{\bar{P}}) = y(\bar{P}) = M_0$ для любого узла $\bar{\bar{P}} \in \bar{\omega}$. Это означает, что $y(P) = M_0 = const$ на всей сетке $\bar{\omega}$, что противоречит условию теоремы.

Второе утверждение теоремы получается из первого, если положить $y(P) = -y(P)$.

Следствие 2.2 *Пусть выполнены условия (1.6) (то есть сетка $\bar{\omega}$ является связной) и (2.1), причем $y(P) \geqslant 0$ в граничных узлах $P \in \gamma$ и $Ly(P) \geqslant 0$ во внутренних узлах $P \in \omega$. Тогда $y(P) \geqslant 0$ при $P \in \bar{\omega}$. Если же $y(P) \leqslant 0$ в граничных узлах $P \in \gamma$ и $Ly(P) \leqslant 0$ во внутренних узлах $P \in \omega$, то $y(P) \leqslant 0$ при $P \in \bar{\omega}$.*

Доказательство. Пусть $Ly(P) \geqslant 0$ во внутренних узлах $P \in \omega$ и $y(P) \geqslant 0$ в граничных узлах $P \in \gamma$. Если существует узел $P_0 \in \omega$, такой что $y(P_0) < 0$, то $y(P)$ должна принимать наименьшее отрицательное значение на ω, что невозможно в силу принципа максимума. Аналогично получаем утверждение в случае $Ly(P) \leqslant 0$ на ω и $y(P) \leqslant 0$ на γ.

Следствие 2.3 *Если выполнены условия (1.6), (2.1), то однородная задача*

$$\begin{cases} Ly(P) = 0, \quad P \in \omega; \\ y(P) = 0, \quad P \in \gamma \end{cases} \tag{2.2}$$

имеет только тривиальное решение $y(P) \equiv 0$.

Доказательство. В силу следствия 2.2 для решения задачи (2.2) во внутренних узлах P сетки ω одновременно справедливы неравенства $y(P) \leqslant 0$ и $y(P) \geqslant 0$, что возможно лишь при $y(P) \equiv 0$, $P \in \omega$.

Следствие 2.4 *Если выполнены условия (1.6), (2.1), то задача*

$$\begin{cases} Ly(P) = F(P), \quad P \in \omega; \\ y(P) = \mu(P), \quad P \in \gamma \end{cases} \tag{2.3}$$

имеет и притом единственное решение.

Доказательство.

1) *Единственность.* Предположим, что существуют два решения $y_1(P) \neq y_2(P)$ задачи (2.3). Тогда сеточная функция $v(P) = y_1(P) - y_2(P)$ будет решением однородной задачи

$$\begin{cases} Lv(P) = 0, \quad P \in \omega; \\ v(P) = 0, \quad P \in \gamma. \end{cases}$$

В силу следствия 2.3 $v(P) \equiv 0$, $P \in \bar{\omega}$, что противоречит предположению $y_1(P) \neq y_2(P)$.

2) *Существование.* Так как задача (2.3) — это СЛАУ, то из того, что задача (2.2) имеет только тривиальное решение следует, что определитель этой СЛАУ отличен от нуля. Это в свою очередь означает, что решение задачи (2.3) существует.

3 Теорема сравнения. Мажоранта

Теорема 3.1 *Пусть $y(P)$ — решение задачи*

$$\begin{cases} Ly(P) = F(P), \;\; P \in \omega; \\ y(P) = \mu(P), \;\; P \in \gamma \end{cases} \tag{3.1}$$

на связной сетке $\bar{\omega}$, причем выполнены условия (1.6), (2.1), а $Y(P)$ — решение задачи

$$\begin{cases} LY(P) = \overline{F}(P), \;\; P \in \omega, \\ Y(P) = \overline{\mu}(P), \;\; P \in \gamma, \end{cases} \tag{3.2}$$

где $\overline{F}(P) \geqslant 0$, $P \in \omega$ и $\overline{\mu}(P) \geqslant 0$, $P \in \gamma$. Тогда из условий

$$|F(P)| \leqslant \overline{F}(P), \;\; P \in \omega; \qquad |\mu(P)| \leqslant \overline{\mu}(P), \;\; P \in \gamma$$

следует неравенство

$$|y(P)| \leqslant Y(P), \;\; P \in \bar{\omega}.$$

Доказательство. Из условий $\overline{F}(P) \geqslant 0$, $P \in \omega$ и $\overline{\mu}(P) \geqslant 0$, $P \in \gamma$ с учетом (1.6), (2.1) следует, что $Y(P) \geqslant 0$, $P \in \bar{\omega}$. Положим $u(P) = y(P) + Y(P)$ и $v(P) = Y(P) - y(P)$. Тогда:

$$\begin{cases} Lu(P) = F(P) + \overline{F}(P) \geqslant 0, \;\; P \in \omega, \\ u(P) = \mu(P) + \overline{\mu}(P) \geqslant 0, \;\; P \in \gamma, \end{cases} \qquad \begin{cases} Lv(P) = \overline{F}(P) - F(P) \geqslant 0, \;\; P \in \omega, \\ v(P) = \overline{\mu}(P) - \mu(P) \geqslant 0, \;\; P \in \gamma. \end{cases}$$

В силу следствия 2.2 получаем, что $u(P) \geqslant 0$ и $v(P) \geqslant 0$ для всех $P \in \bar{\omega}$. Таким образом:

$$-Y(P) \leqslant y(P) \leqslant Y(P) \;\Rightarrow\; |y(P)| \leqslant Y(P), \;\; P \in \bar{\omega}.$$

Определение 3.2 *Функция $Y(P)$, являющаяся решением задачи (3.2), называется мажорантой для решения задачи (3.1).*

Проведем редукцию задачи (3.1): $y(P) = y_1(P) + y_2(P)$, где

$$\begin{cases} Ly_1(P) = 0, \;\; P \in \omega; \\ y_1(P) = \mu(P), \;\; P \in \gamma; \end{cases} \tag{3.3}$$

$$\begin{cases} Ly_2(P) = F(P), \;\; P \in \omega; \\ y_2(P) = 0, \;\; P \in \gamma. \end{cases} \tag{3.4}$$

Лемма 3.3 *Для решения задачи (3.3) справедлива оценка:*

$$\|y_1\|_{\bar{C}} = \max_{P\in\bar{\omega}} |y_1(P)| \leqslant \|\mu\|_{C_\gamma}, \tag{3.5}$$

где $\|\mu\|_{C_\gamma} = \max\limits_{P\in\gamma} |\mu(P)|$.

Доказательство. Определим мажоранту $Y_1(P)$ как решение задачи:

$$\begin{cases} LY_1(P) = 0, \ \ P \in \omega; \\ Y_1(P) = \|\mu\|_{C_\gamma}, \ \ P \in \gamma. \end{cases}$$

Поскольку $Y_1(P) \geqslant 0$, $P \in \bar{\omega}$, то если $Y_1(P) \not\equiv const$, то существует $\bar{P} \in \bar{\omega}$, такая что $Y_1(\bar{P}) = \max\limits_{P\in\bar{\omega}} Y(P)$, причем в силу принципа максимума $\bar{P} \in \gamma$. Но тогда

$$\|Y_1\|_{\bar{C}} = \max_{P\in\bar{\omega}} |Y_1(P)| = Y_1(\bar{P}) = \max_{P\in\gamma} |Y_1(P)| = \|\mu\|_{C_\gamma}.$$

Если же $Y_1(P) \equiv const$, то $Y_1(P) = \|\mu\|_{C_\gamma}$, $P \in \bar{\omega}$. В силу теоремы 3.1:

$$|y_1(P)| \leqslant Y_1(P), \ \ P \in \bar{\omega} \ \ \Rightarrow \ \ \|y_1\|_{\bar{C}} \leqslant \|Y_1\|_{\bar{C}} = \|\mu\|_{C_\gamma}.$$

Теорема 3.4 *Если $D(P) > 0$ всюду на ω, то для решения $y_2(P)$ задачи (3.4) верна оценка*

$$\|y_2\|_C \leqslant \left\| \frac{F}{D} \right\|_C. \tag{3.6}$$

Доказательство. Определим мажоранту $Y_2(P)$ как решение задачи:

$$\begin{cases} LY_2(P) = |F(P)|, \ \ P \in \omega; \\ Y_2(P) = 0, \ \ P \in \gamma. \end{cases}$$

Во-первых, поскольку $LY_2(P) = |F(P)| \geqslant 0$ и $Y_2(P) \not\equiv const$, то из принципа максимума следует, что $Y_2(P)$ не может принимать во внутренних узлах минимальное отрицательное значение. Так как в граничных узлах $Y_2(P)$ неотрицательна, то $Y_2(P) \geqslant 0$, $P \in \bar{\omega}$.

Во-вторых, существует такой узел $\bar{P} \in \omega$, что $Y_2(\bar{P}) = \max\limits_{p\in\bar{\omega}} Y_2(P)$. Поскольку $Y_2(P)$ неотрицательна всюду на $\bar{\omega}$, то

$$Y_2(\bar{P}) = \max_{p\in\bar{\omega}} |Y_2(P)| = \|Y_2\|_C.$$

Из уравнения

$$\underbrace{D(\bar{P})}_{>0}\underbrace{Y_2(\bar{P})}_{\geqslant 0} + \sum_{Q\,\in\,Ш'(\bar{P})} \underbrace{B(\bar{P},Q)}_{>0}\underbrace{(Y_2(\bar{P}) - Y_2(Q))}_{\geqslant 0} = |F(\bar{P})|$$

следует, что

$$D(\bar{P})Y_2(\bar{P}) \leqslant |F(\bar{P})| \ \Rightarrow \ Y_2(\bar{P}) \leqslant \frac{|F(\bar{P})|}{D(\bar{P})} \leqslant \left\| \frac{F}{D} \right\|_C.$$

Так как $Y_2(P)$ — мажоранта для $y_2(P)$, то

$$\|y_2\|_C \leqslant \|Y_2\|_C \leqslant \left\| \frac{F}{D} \right\|_C.$$

4 Задачи для самостоятельного решения

Задача 4.1. *Покажите, что неявная схема для задачи*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in (0,l), \ t \in (0,T], \\ u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(l,t) = \mu_2(t), \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

на равномерной сетке $\overline{\omega_{h\tau}} = \overline{\omega_h} \times \overline{\omega_\tau}$,

$$\overline{\omega_h} = \{x_i = ih, \, i = 0,1,...,i_0, \, i_0 h = l\}, \ \ \overline{\omega_\tau} = \{t_j = j\tau, \, j = 0,1,...,j_0, \, j_0\tau = T\}$$

устойчива по начальным и граничным условиям при любых соотношениях шагов τ *и* h.

Задача 4.2. *Покажите, что явная схема для предыдущей задачи на равномерной сетке устойчива по начальным и граничным условиям, если* $\tau < \dfrac{h^2}{2a^2}$.

Задача 4.3. *Покажите, что разностная схема*

$$\begin{cases} \dfrac{y_{i+1}^{j+1} - y_{i+1}^{j}}{\tau} + c \cdot \dfrac{y_{i+1}^{j+1} - y_{i}^{j+1}}{h} = 0, \ \ i = 0,1,..., \ j = 0,1,... \\ y_0^j = \mu(t_j), \ j = 0,1,... \\ y_i^0 = \varphi(x_i), \ i = 0,1,... \end{cases}$$

для начально-краевой задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + c \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x \in (0,+\infty), \ t \in (0,+\infty), \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad u(0,t) = \mu(t), \end{cases}$$

где $c > 0$ *— константа, устойчива по начальным и граничным условиям при любых соотношениях шагов* τ *и* h.

Задача 4.4. *Покажите, что разностная схема*

$$\begin{cases} \dfrac{y_{i+1}^{j+1} - y_{i+1}^{j}}{\tau} + c \cdot \dfrac{y_{i+1}^{j} - y_{i}^{j}}{h} = 0, \ \ i = 0,1,..., \ j = 0,1,... \\ y_0^j = \mu(t_j), \ j = 0,1,... \\ y_i^0 = \varphi(x_i), \ i = 0,1,... \end{cases}$$

где $c > 0$ *— константа, устойчива по начальным и граничным условиям, если выполнено условие Куранта* $c\tau < h$.